862. Fourier series ト Fourier transform トノ関係 II

河田 龍夫 (仙台高工)

1. I ニ於テ証明シタ Fourier series ト Fourier transform トノ関係ニ関スル定理ヲ用ヒテ, Fourier series ノ Hausdorff-Young ノ定理カラ Fourier transform ニ関スル Titchmarsh ノ定理ヲ証明スル。(Titchmarsh 自身モ Fourier series ノ Hausdorff-Young ノ定理ニ reduce シテ証明シタノデアルガ, コレデヤルノトハ少シ異フ。

一般ノ Fourier transform ト Fourier series

ノ関係ヨリ出スト云フ意味デ面白クナイコトモナカロウト思ハレル)

<u>Theorem 4.</u> $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leqq 2$ トシ. ソノ Fourier transform ヲ $F(t)$ トスルト

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqq A_{q_p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

A_p ハ p ニノミ depend シテ function f ニハ independent ナ常数.

<u>Proof.</u> $\varphi(t)$ ヲ period $2R$ ノ periodic function デ $(-R, R)$ デ $F(t)$ ト一致スルトスル. c_n ヲ $\varphi(t)$ ノ Fourier coeff $\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \varphi(t) e^{-int} dt$ トスルト Hausdorff-Youngs theorem ニヨリ

$$(1) \quad \left(\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} |\varphi(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqq A_p \left(\sum |c_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

故ニ

$$\left(\int_{-R}^{R} |F(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{-R}^{R} |\varphi(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqq A_p R^{\frac{1}{q}} \left(\sum |c_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

I ノ定理 1 ニヨリ

$$\leqq A_p R^{\frac{1}{q}} \left(\frac{A_p}{R^{p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= A_p \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

故ニ

$$\left(\int_{-R}^{R}|F(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqq A_p\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

A_p ハ P ニノミ depend シテ function ニ depend シナイカラ R ニモ depend シナイ。

$R\to\infty$ トスレバ吾々ノ定理 4 ヲ得ル。

2. Theorem 4 カラ ordinary method ニヨリ $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ $(1<p\leqq 2)$ ノ Fourier transform ノ existence ヲ証明スル。（是レハ新シクナイケレド序ニ証明シテオク）

今 $$F_a(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(x)\,e^{-ixt}dx$$

トオク。$b>a$ トスル。

$$F_b(t)-F_a(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_a^b+\int_{-b}^{-a}\right)f(x)\,e^{-ixt}dx$$

ハ明ラカニ $\psi(x)=f(x)\quad a<x<b,\ -b<x<-a$

$\qquad\qquad\qquad\quad =0,\quad$ otherwise

ノ Fourier transform デアル。故ニ定理 4 ニヨリ

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F_b(t)-F_a(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqq A_p\left(\int_a^b|f(x)|^p dx+\int_{-b}^{-a}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$b\to\infty,\ a\to\infty$ トシテ

$$\lim_{a,b\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F_b(t)-F_a(t)|^q dt=0$$

故ニ

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F_a(t)-F(t)|^q dt=0$$

ナル $F(t)$ ($L_q(-\infty,\infty)$) ガ exist スル. 是レデ $f(x)$ ノ Fourier transform $F(t)$ ノ existence ガ証明サレタ。